班级:______ 姓名:______ 得分:______

数学

单元素养测评卷(一)

第一章

(时间:120 分钟　分值:150 分)

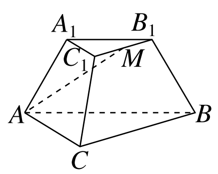
一、选择题:本题共 8 小题,每小题 5 分,共 40 分.在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的.

1. 下列向量中,与向量 $\boldsymbol{a}=(2,-3,1)$平行的是 (　　)

A. $(1,1,1)$　　B. $(-2,3,1)$

C. $\left(-\frac{2}{3},1,-\frac{1}{3}\right)$　　D. $(-2,-1,1)$

2. [2025·邢台高二期中] 如图,在三棱台 $ABC-A_1B_1C_1$ 中,$AB=2A_1B_1$,M 为 B_1C_1 的中点,则 $\overrightarrow{AM}=$ (　　)



A. $\overrightarrow{AA_1}+\frac{1}{4}\overrightarrow{AC}-\frac{1}{4}\overrightarrow{AB}$　　B. $\overrightarrow{AA_1}-\frac{1}{4}\overrightarrow{AC}+\frac{1}{4}\overrightarrow{AB}$

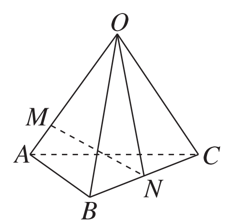
C. $\overrightarrow{AA_1}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}+\frac{1}{4}\overrightarrow{AB}$　　D. $\overrightarrow{AA_1}+\frac{1}{4}\overrightarrow{AC}+\frac{1}{4}\overrightarrow{AB}$

3. 已知直线 l 的一个方向向量为 $\boldsymbol{s}=(-1,1,1)$,平面 α 的一个法向量为 $\boldsymbol{n}=(2,x^2+x,-x)$,若直线 l//平面 α,则实数 x 的值为 (　　)

A. -2　　B. $-\sqrt{2}$

C. $\sqrt{2}$　　D. $\pm\sqrt{2}$

4. [2025·河北名校联合体高二期中] 在四面体 $OABC$ 中,点 M 为 OA 上靠近 A 的四等分点,N 为 BC 的中点,若 $\overrightarrow{MN}=x\overrightarrow{OA}+y\overrightarrow{OB}+z\overrightarrow{OC}$,则 $x+y+z$ 的值为 (　　)



A. $\frac{3}{2}$　　B. 1

C. $\frac{1}{4}$　　D. $\frac{1}{3}$

5. 已知 $\boldsymbol{a}=(3,0,4)$,$\boldsymbol{b}=(-3,2,5)$,则向量 $\boldsymbol{a}$ 在向量 $\boldsymbol{b}$ 上的投影向量是 (　　)

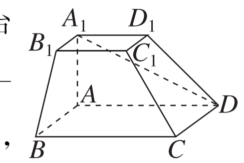
A. $\frac{11}{25}(-3,2,5)$　　B. $\frac{11}{38}(-3,2,5)$

C. $\frac{11}{25}(3,0,4)$　　D. $\frac{11}{38}(3,0,4)$

6. [2025·承德高新区一中高二月考] 在长方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中,B_1C 和 C_1D 与底面 $A_1B_1C_1D_1$ 所成的角分别为 $60°$和 $45°$,则异面直线 B_1C 和 C_1D 所成角的余弦值为 (　　)

A. $\frac{\sqrt{6}}{4}$　　B. $\frac{\sqrt{10}}{4}$　　C. $\frac{\sqrt{3}}{2}$　　D. $\frac{\sqrt{3}}{4}$

7. [2025·抚顺六校协作体高二期中] 如图,在四棱台 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中,底面 $ABCD$ 是菱形,$AA_1\perp$平面 $ABCD$,$AA_1=A_1B_1=\frac{1}{2}AB=1$,$\angle ABC=\frac{\pi}{3}$,则点 B 到直线 A_1D 的距离为 (　　)



A. 2　　B. $2\sqrt{6}$

C. $\frac{2\sqrt{15}}{5}$　　D. $\frac{2\sqrt{30}}{5}$

8. 在棱长为 2 的正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中,E 为 BC 的中点,点 P 在底面 $ABCD$ 上移动,且满足 $B_1P\perp D_1E$,则线段 B_1P 长度的最大值为 (　　)

A. 2　　B. 3　　C. $2\sqrt{2}$　　D. $\frac{6\sqrt{5}}{5}$

二、选择题:本题共 3 小题,每小题 6 分,共 18 分.在每小题给出的选项中,有多项符合题目要求,全部选对的得 6 分,部分选对的得部分分,有选错的得 0 分.

9. 下列说法正确的是 (　　)

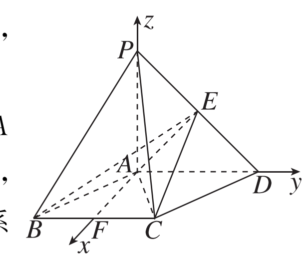
A. 设 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 是两个空间向量,则 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 一定共面

B. 设 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 是三个空间向量,则 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 一定不共面

C. 设 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 是两个空间向量,则$(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})^2=\boldsymbol{a}^2\cdot\boldsymbol{b}^2$

D. 设 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 是三个空间向量,则 $\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}$

10. 在四棱锥 $P-ABCD$ 中,底面 $ABCD$ 为菱形,$\angle ABC=60°$,$PA\perp$平面 $ABCD$,$PA=AC=2$,E,F 分别为 PD,BC 的中点,若以 A 为原点,以 AF,AD,AP 所在直线分别为 x,y,z 轴,建立如图所示的空间直角坐标系 $Axyz$,则 (　　)



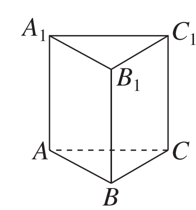
A. 点 B 的坐标为$(\sqrt{3},-1,0)$

B. $\overrightarrow{PB}\cdot\overrightarrow{AC}=2$

C. $\overrightarrow{BE}=(-\sqrt{3},2,1)$

D. 平面 ACE 的一个法向量为 $\boldsymbol{n}=(1,\sqrt{3},-\sqrt{3})$

11. [2025·运城高二期中] 如图,在正三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中,P 为空间内一动点,若 $\overrightarrow{BP}=\lambda\overrightarrow{BC}+\mu\overrightarrow{BB_1}(\lambda,\mu\in[0,1])$,则下列说法正确的是 (　　)



A. 若 $\lambda=\mu$,则点 P 的轨迹为线段 BC_1

B. 若 $\mu=1-\lambda$,则点 P 的轨迹为线段 B_1C

C. 存在 $\lambda,\mu\in(0,1)$,使得 $AP\perp$平面 BCC_1B_1

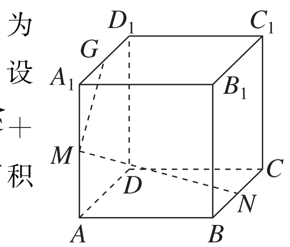
D. 存在 $\lambda,\mu\in(0,1)$,使得 AP//平面 $A_1B_1C_1$

三、填空题:本题共 3 小题,每小题 5 分,共 15 分.

12. 已知 $\boldsymbol{n}=(-3,1,2)$是平面 α 的一个法向量,点 $A(0,-3,-1)$,$B(k,2k,2)$都在平面 α 内,则 $k=$________.

13. [2025·郑州高二期中] 四棱锥 $P-ABCD$ 中,$PD\perp$底面 $ABCD$,底面 $ABCD$ 是正方形,且 $PD=1$,$AB=3$,G 是$\triangle ABC$ 的重心,则 PG 与平面 PAD 所成角 θ 的正弦值为________.

14. 如图,已知正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的棱长为 4,M,N,G 分别是棱 AA_1,BC,A_1D_1 的中点,设 Q 是该正方体表面上的一点,若 $\overrightarrow{MQ}=x\overrightarrow{MG}+y\overrightarrow{MN}(x,y\in\mathbf{R})$,则点 Q 的轨迹围成图形的面积是________,$\overrightarrow{MG}\cdot\overrightarrow{MQ}$ 的最大值为________.

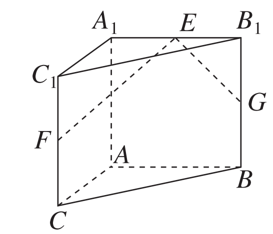


四、解答题:本题共 5 小题,共 77 分.解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

15. (13 分)如图,在直三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中,E,F,G 分别为 A_1B_1,CC_1,BB_1 的中点,分别记 $\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AA_1}$ 为 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$.

(1)用 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 表示 $\overrightarrow{EF},\overrightarrow{EG}$;

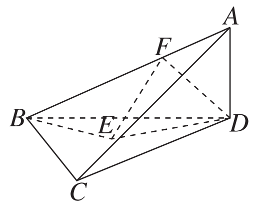
(2)若 $AB=AC=AA_1=2$,$AB\perp AC$,求$|\overrightarrow{EF}+2\overrightarrow{EG}|$.



16. (15 分)如图,在四面体 $ABCD$ 中,$AD\perp$平面 BCD,$BC\perp CD$. E 为 $\triangle BCD$ 的重心,点 F 在棱 AB 上,$FB=2AF$.

(1)证明:$BC\perp EF$;

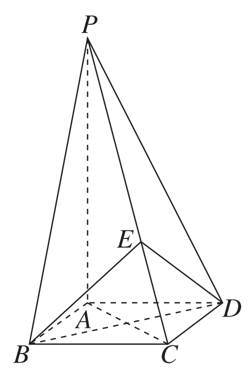
(2)若 $AD=BC=2$,$CD=4$,求平面 BEF 与平面 EFD 的夹角的余弦值.



17. (15 分)如图,在四棱锥 $P\text{-}ABCD$ 中,$PA\perp$平面 $ABCD$,底面四边形 $ABCD$ 是正方形,$PA=2AD$,点 E 为 PC 上的点,$PE=2EC$.

(1)求证:平面 $PAC\perp$平面 BDE;

(2)若 $AD=1$,求点 C 到平面 BDE 的距离.

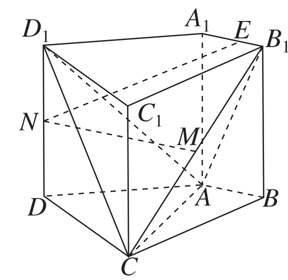


18. (17 分)如图,在四棱柱 $ABCD\text{-}A_1B_1C_1D_1$ 中,侧棱 $A_1A\perp$底面 $ABCD$,$AB\perp AC$,$AB=1$,$AC=AA_1=2$,$AD=CD=\sqrt{5}$,且点 M 和 N 分别为 B_1C 和 D_1D 的中点.

(1)求证:$MN/\!/$平面 $ABCD$;

(2)求平面 ACD_1 与平面 ACB_1 夹角的余弦值;

(3)设 E 为棱 A_1B_1 上的点,若直线 NE 和平面 $ABCD$ 所成角的正弦值为$\frac{1}{3}$,求线段 A_1E 的长.



19. (17 分)在空间直角坐标系 $Oxyz$ 中,已知向量 $\boldsymbol{\mu}=(a,b,c)$,点 $P_0(x_0,y_0,z_0)$. 若平面 α 以 $\boldsymbol{\mu}$ 为法向量且经过点 P_0,则平面 α 的点法式方程可表示为 $a(x-x_0)+b(y-y_0)+c(z-z_0)=0$,一般式方程可表示为 $ax+by+cz+d=0$.

(1)若平面 $\alpha_1:x-2y+1=0$,直线 l 的一个方向向量为 $\boldsymbol{m}=(0,3,-1)$,求直线 l 与平面 α_1 所成角的正弦值;

(2)已知集合 $P=\{(x,y,z)\,|\,|x|+|y|+|z|\leqslant 3\}$,记集合 P 中所有点构成的几何体的体积为 V,集合 $Q=\{(x,y,z)\,|\,|x|+|y|\leqslant 3,|y|+|z|\leqslant 3,|z|+|x|\leqslant 3\}$,记集合 Q 中所有点构成的几何体为 W,求 V 的值及几何体 W 相邻两个面(有公共棱)所在平面夹角的余弦值.